PAP 2.2
Versuch 255: "Röntgenspektrometer"

Jonas Schweer

15. Januar 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**
- 1.1 Ziel des Versuchs . . . 2
- 1.2 Versuchsaufbau . . . 2
- 1.3 Physikalische Grundlagen . . . 3

2 Messprotokoll **4**

3 Auswertung **15**
- 3.1 Aufgabe 1 . . . 15
- 3.2 Aufgabe 2 . . . 16
- 3.3 Aufgabe 3 . . . 17
- 3.4 Aufgabe 4 . . . 19

4 Zusammenfassung und Diskussion **20**

5 Anhang **21**

1 Einleitung

1.1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch wollen wir das Röntgenspektrum einer Molybdän-Anode ausmessen. Daraus wollen wir sowohl das planck'sche Wirkungsquantum h bestimmen, als auch die K_α- und K_β-Linien erster und zweiter Ordnung auslesen. Deren Wellenlängen wollen wir bestimmen. Zudem wollen wir unter konstantem Winkel die Intensität pro Spannung aufnehmen, und so erneut h berechnen. In der zweiten Messreihe wollen wir anhand der K_α- und K_β-Linien erster und zweiter Ordnung eines NaCl-Kristalls seine Gitterkonstante und die Avogadrokonstante N_A errechnen.

1.2 Versuchsaufbau

Das zentrale Gerät, mit dem wir den Versuch durchführen, ist das Röntgenspektrometer. Dieses ist ein großer Kasten, welcher durch eine Wand in zwei wesentliche Teile unterteilt ist. Auf der einen Seite befindet sich eine Röntgenröhre, auf der anderen Seite ein Goniometer. Verbunden sind die beiden Seiten nur durch einen Kollimator.
Die Röntgenröhre besteht aus einer Glühkathode, welche unter anlegen einer Heizspannung freie Elektronen erzeugt. Diese werden durch eine angelegte Beschleunigungsspannung in Richtung der Anode aus Molybdän beschleunigt. Treffen sie auf, werden die Röntgenstrahlen ausgesendet, die dann mit dem Kollimator in den Goniometeraufbau geleitet werden. Dieser besteht aus einer drehbar gelagerten Kristallhalterung, gefolgt von einem mit-rotierendem Zählrohr. Dieses ist so synchronisiert, dass es immer um den doppelten Winkel des Kristalls gedreht ist, sodass die reflektierte Strahlung gemessen wird. Die Winkel, sowie die Spannung lassen sich an dem Gerät bzw. dem beistehenden Computer einstellen, bei dem auch die gemessenen Zählraten automatisch gespeichert und geplottet werden. Die plättchenförmigen Kristalle liegen ebenfalls bei.

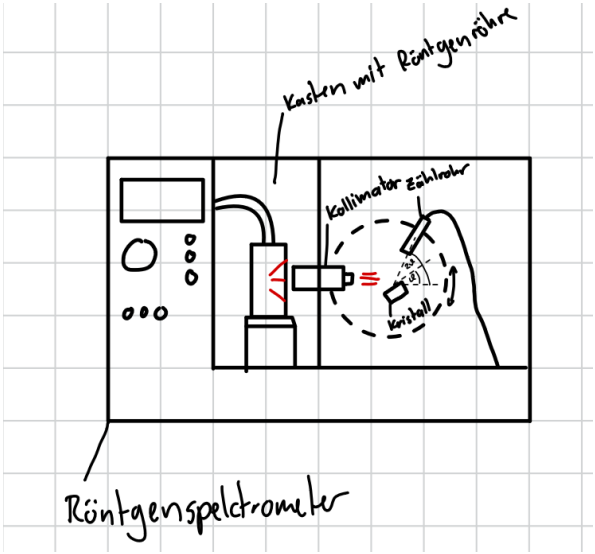


Abbildung 1: Messaufbau Röntgenspektrometer

1.3 Physikalische Grundlagen

In der Glühkathode werden Elektronen freigegeben. Diese werden durch die angelegte Beschleunigungsspannung zur Anode hinbewegt. Beim Ankommen an der Anode haben sie dann folgende Energie:

$$E_{kin} = eU_B + E_{Heiz} \tag{1}$$

Diese setzt sich zusammen aus der Energie E_{Heiz}, welche die Energie ist, mit der die Elektronen aus der Glühkathode emittiert werden, und der Energie, die während der Beschleunigung addiert wird eU_B. e ist die Elementarladung und U_B die Beschleunigungsspannung. Wir wissen nun also, dass die minimale Energie, mit der ein Elektron bei der Anode ankommt genau die Energie ist, bei der es einfach nur aus der Kathode gelöst wurde, ohne zusätzliche Energie. Also:

$$E_{kin,min} = eU_B \tag{2}$$

Werden die Elektronen nun von der Anode abgebremst, geben sie die Energie, die an kinetischer verlieren, als elektromagnetische Strahlung in alle Richtung ab. Je nach Beschleunigungsspannung kann die Strahlung im Röntgenbereich liegen (10kV bis 100kV). Da die Energie der emittierten Photonen mit:

$$E_{ph} = \frac{hc}{\lambda} \tag{3}$$

berechnet werden kann, wobei h die Planck-Konstante, c die Lichtgeschwindigkeit und λ die Wellenlänge der Strahlung ist, muss die maximale Wellenlänge der emittierten Röntgenquanten durch folgende Formel gegeben sein:

$$\lambda_{gr} = \frac{hc}{eU_B} \tag{4}$$

Dort setzt dann das kontinuierliche, so genannte 'Bremsspektrum' ein. Die Kontinuität kommt daher, dass die Energie, welche die Glühkathode zusätzlich hinzugibt ebenfalls kontinuierlich ist.
Überlagert wird dieses von dem 'charakteristischen Spektrum'. Dieses entsteht, wenn durch die ankommenden Elektronen Elektronen der inneren Schalen des Anodenmaterials ausgeschlagen werden. Rückt nun ein Elektron der höheren Schalen nach, gibt es immer genau die quantisierte Energie, die speziell für diesen Übergang ist, als Strahlung ab. Da diese immer die selben Energien sind, machen sie sich in dem überlagerten Spektrums als Peaks sichtbar. Benennen kann man sie, je nach dem von welcher in welche Schale das Elektron wandert. Die K-Serie besteht aus allen Peaks, die entstehen, wenn ein Elektron in die K-Schale (also die innerste) wandert, die L-Serie alle die in die L-Schale. Ähnlich für alle andere Schalen. Zum Beispiel der Übergang von L nach K Schale (zweit innerste zu innerste) wird mit K_α, von M zu K Schale K_β, von M zu L Schale L_α und so weiter. Der Index gibt an, wie weit die Schalen auseinander liegen. Meist kann man auf dem Spektrum allerdings sowieso nur K_α und K_β Linien erkennen, da die anderen nicht oft genug vorkommen. Durch das Moseleyische Gesetz können wir eine Abschätzung der Übergangsenergien treffen. Für einen Übergang von der n-ten Schale in die m-te Schale lautet es:

$$E_{n\to m} = h \cdot c \cdot R_\infty (Z - A)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \tag{5}$$

R_∞ ist die Rydbergkonstante, Z die Kernladungszahl und A der Abschirmungsfaktor. Allerdings ist das nur eine Näherung, die eigentlichen Literaturwerte weichen meist ab (aufgrund spezieller Feinstrukturen).
Kristalle sind streng periodisch angeordnet und die Atomabstände liegen von der Größenordnung im Wellenlängenbereich der Röntgenstrahlung. So eignen sie sich gut, um sie als Gitter zu nutzen, da man aus der Anordnung der Atome oft leichter auf die Gitterkonstante a schließen kann. Man beobachtet an ihnen wie an einem normalen Gitter Beugung und Reflexion.
Die beiden betrachteten Kristalle (LiF und NaCl) sind zum Beispiel aus würfelförmigen Elementarzellen aufgebaut, bei dem die benachbarten Atome immer unterschiedlich sind (Na-Cl-Na-..., Li-F-Li-...). a ist hier dann der Abstand zwischen zwei Atomen gleichen Typs (Na zu Na, Li zu Li etc.). Der Abstand d zweier Ebenen sind dann also $d = \frac{a}{2}$.
Mit diesem wissen können wir nun die Avogadrokonstante bestimmen mit:

$$N_A = 4\frac{V_{mol}}{V} = \frac{M_{mol}}{2\rho d^3} \tag{6}$$

V_{mol} ist das molare Volumen, V das Volumen einer Elementarzelle, M_{mol} die molare Masse, ρ die Dichte und d besagter Abstand der Ebenen.
Wenn Strahlen auf solch eine Kristallstruktur einfallen, werden sie reflektiert. Allerdings werden auch Strahlen in der Schicht eins niedriger reflektiert. So kommt es zu einem Gangunterschied der Strahlen, die miteinander Interferieren. Der Gangunterschied lässt sich mit

$$\Delta s = 2d \sin \vartheta \tag{7}$$

berechnen. Bei der Interferenz kann es unter bestimmten Winkeln zu konstruktiver Interferenz kommen. Die Bedingung für den Gangunterschied lautet

$$\Delta s = n \cdot \lambda,\ n \in \mathbb{N} \tag{8}$$

Wissen wir also nun, unter welchen Winkeln die wievielte konstruktive Interferenz einer bestimmten Wellenlänge auftritt, lässt sich der der Ebenenabstand d folgendermaßen berechnen:

$$d = \frac{n\lambda}{2 \sin \vartheta} \tag{9}$$

2 Messprotokoll

Messprotokoll: Röntgenspektrometer

19.11.24

Harish Mahendran
Jonas Schweer

Messinstrumente

- Röntgengerät mit Röntgenröhre
- Goniometer
- Zählrohr
- LiF- und NaCl-Kristall
- Computer
- Leuchtschirm mit CCD-Kamera

Versuch 1: Röntgenspektrum eines LiF-Kristalls

Für den ersten Versuch montieren wir einen LiF-Kristall in den Versuchsaufbau.

Wir stellen bei dem Gerät folgendes ein:

$U = (35{,}00 \pm 0{,}10)\,kV$ $I = (1{,}000 \pm 0{,}010)_{mA}$ $t = 5s$ $\Delta\beta = 0{,}2°$

Wir scannen im Bereich von 3° bis 22° und speichern die Ergebnisse ab.

Versuch 2: Vermessen der K_α und K_β-Linien

Wir bestimmen die K_α und K_β-Linien grob.:

	K_α	K_β
1. Ord.	10,2°	9°
2. Ord.	20,8°	18,4°

Tabelle 1: Ungefähre Lage der K-Linien

Wir führen eine Messung von 8,8° - 10,8° durch bei folgenden Einstellungen:

$U = (35{,}00 \pm 0{,}10)\,kV$ $I = (1{,}000 \pm 0{,}010)_{mA}$ $t = 20s$ $\Delta\beta = 0{,}1°$

und eine Weitere von 18,0° - 21,1° bei selben Einstellungen

Aufgabe 3: Zählrate als Funktion der Beschleunigungsspannung

Wir stellen den Winkel auf 7,5° ein und variieren die Spannung. Wir fangen bei $U=(20{,}00\pm0{,}10)\,kV$ an und gehen in 1kV schritten bis $(35{,}00\pm0{,}10)kV$. Wir messen jeweils 20s.

U [kV]	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
$\frac{n}{t}$ [s^{-1}]	2,95	3,6	6,95	9,55	22,75	108,1	181,2	243	297,3	358,4	410,4	460,9	517,3	553,6	614,0	644,1

Tabelle 2: Zählrate pro Spannung

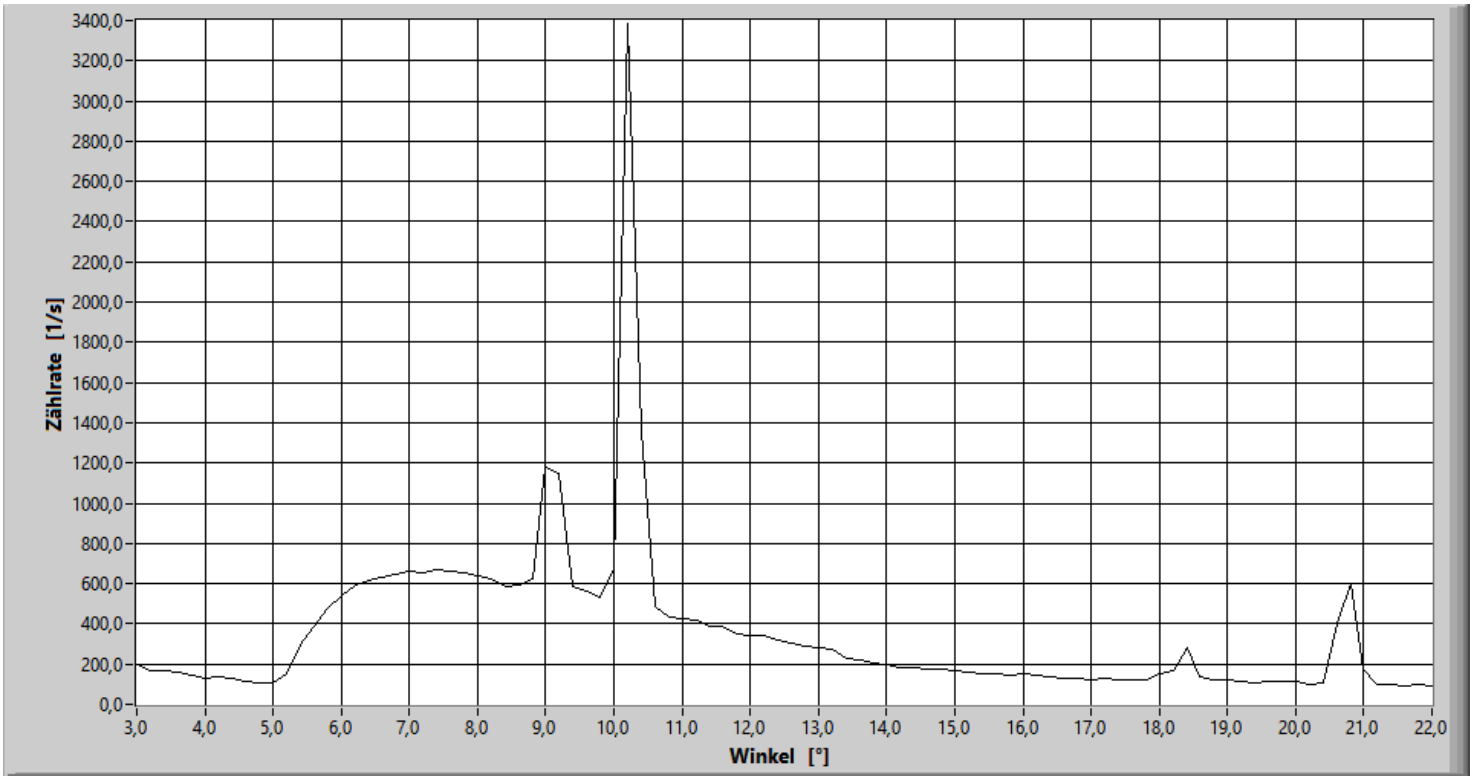
Aufgabe 4 Röntgenspektrum eines NaCl - Kristalls

Wir tauschen den Kristall aus Aufgabe 1 mit einem NaCl-Kristall aus. Wir benutzen die selben Einstellungen wie in Aufgabe 1 und messen in einem Winkelbereich 3°-18°. Wir speichern die Ergebnisse.

Messprotokoll LiF

Di, 19. Nov 2024
14:48 Uhr

Röhrenspannung: 35,0 kV / Röhrenstrom: 1,0 mA / Scanbereich: 3,0° bis 22,0° / Schrittweite: 0,2° / Messzeit: 5,0 s

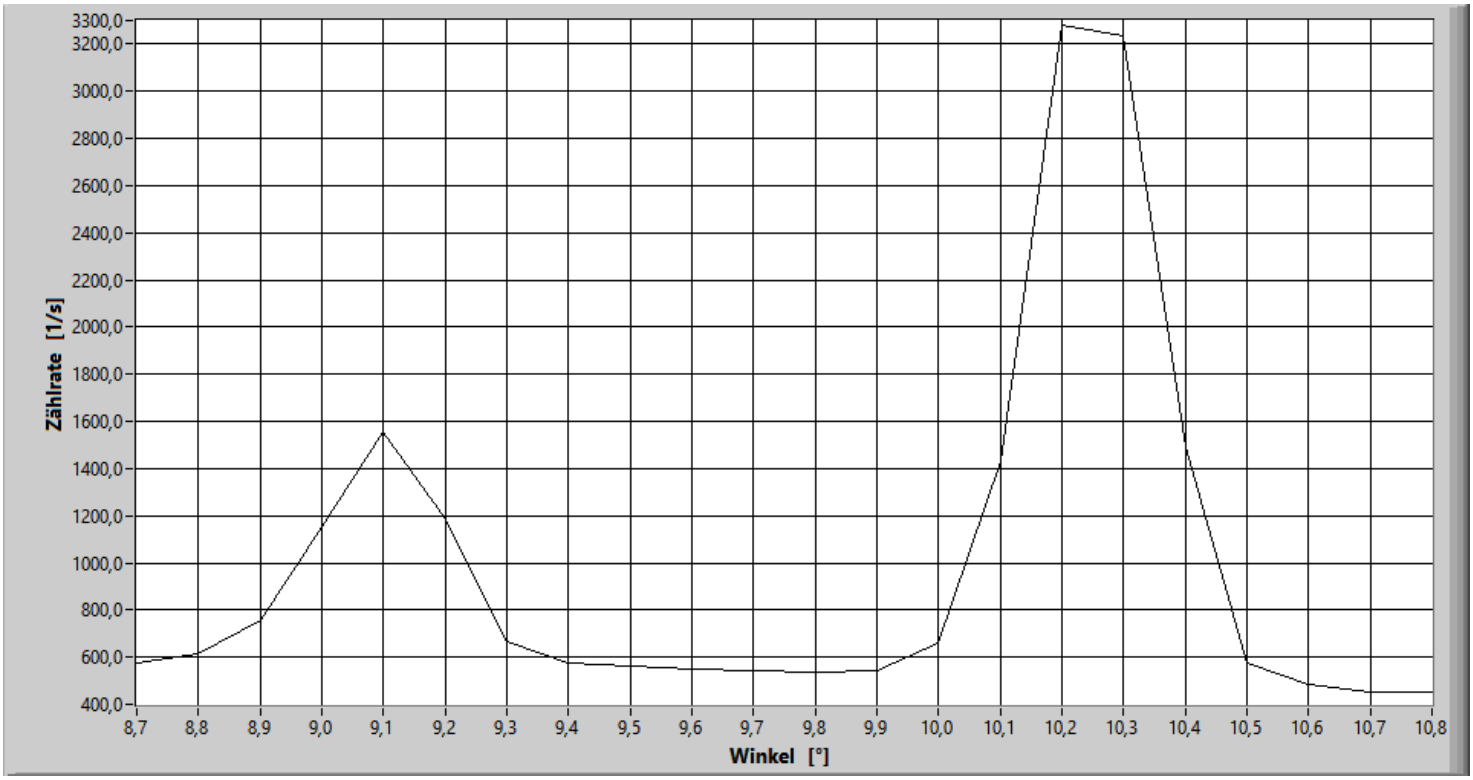


Winkel [°]	Zählrate [1/s]	Winkel [°]	Zählrate [1/s]	Winkel [°]	Zählrate [1/s]	Winkel [°]	Zählrate [1/s]	Winkel [°]	Zählrate [1/s]
3,0	194,0	7,0	659,8	11,0	423,4	15,0	170,8	19,0	122,0
3,2	170,6	7,2	657,8	11,2	419,8	15,2	161,8	19,2	115,6
3,4	168,2	7,4	667,6	11,4	389,6	15,4	148,4	19,4	109,0
3,6	157,6	7,6	658,2	11,6	385,2	15,6	150,4	19,6	112,8
3,8	146,4	7,8	656,0	11,8	351,4	15,8	145,8	19,8	112,4
4,0	131,0	8,0	641,6	12,0	339,6	16,0	149,0	20,0	112,0
4,2	134,2	8,2	624,0	12,2	339,8	16,2	141,6	20,2	101,2
4,4	129,8	8,4	582,4	12,4	316,0	16,4	133,8	20,4	106,2
4,6	114,2	8,6	591,2	12,6	301,8	16,6	131,6	20,6	400,8
4,8	104,4	8,8	622,6	12,8	292,2	16,8	127,6	20,8	602,6
5,0	106,2	9,0	1180,0	13,0	281,2	17,0	121,4	21,0	176,4
5,2	153,0	9,2	1148,0	13,2	272,2	17,2	126,0	21,2	102,4
5,4	298,4	9,4	584,2	13,4	227,2	17,4	121,8	21,4	99,2
5,6	384,8	9,6	566,0	13,6	217,8	17,6	124,8	21,6	93,0
5,8	479,6	9,8	533,2	13,8	205,4	17,8	123,4	21,8	96,8
6,0	539,0	10,0	670,6	14,0	194,4	18,0	148,4	22,0	91,2
6,2	596,6	10,2	3382,8	14,2	186,0	18,2	166,4	0,0	0,0
6,4	615,6	10,4	1361,6	14,4	183,8	18,4	279,6	0,0	0,0
6,6	635,0	10,6	486,4	14,6	176,6	18,6	133,4	0,0	0,0
6,8	648,4	10,8	437,2	14,8	173,4	18,8	121,8	0,0	0,0

Messprotokoll LiF erste Ordnung

Di, 19. Nov 2024
14:37 Uhr

Röhrenspannung: 35,0 kV / Röhrenstrom: 1,0 mA / Scanbereich: 8,7° bis 10,8° / Schrittweite: 0,1° / Messzeit: 20,0 s

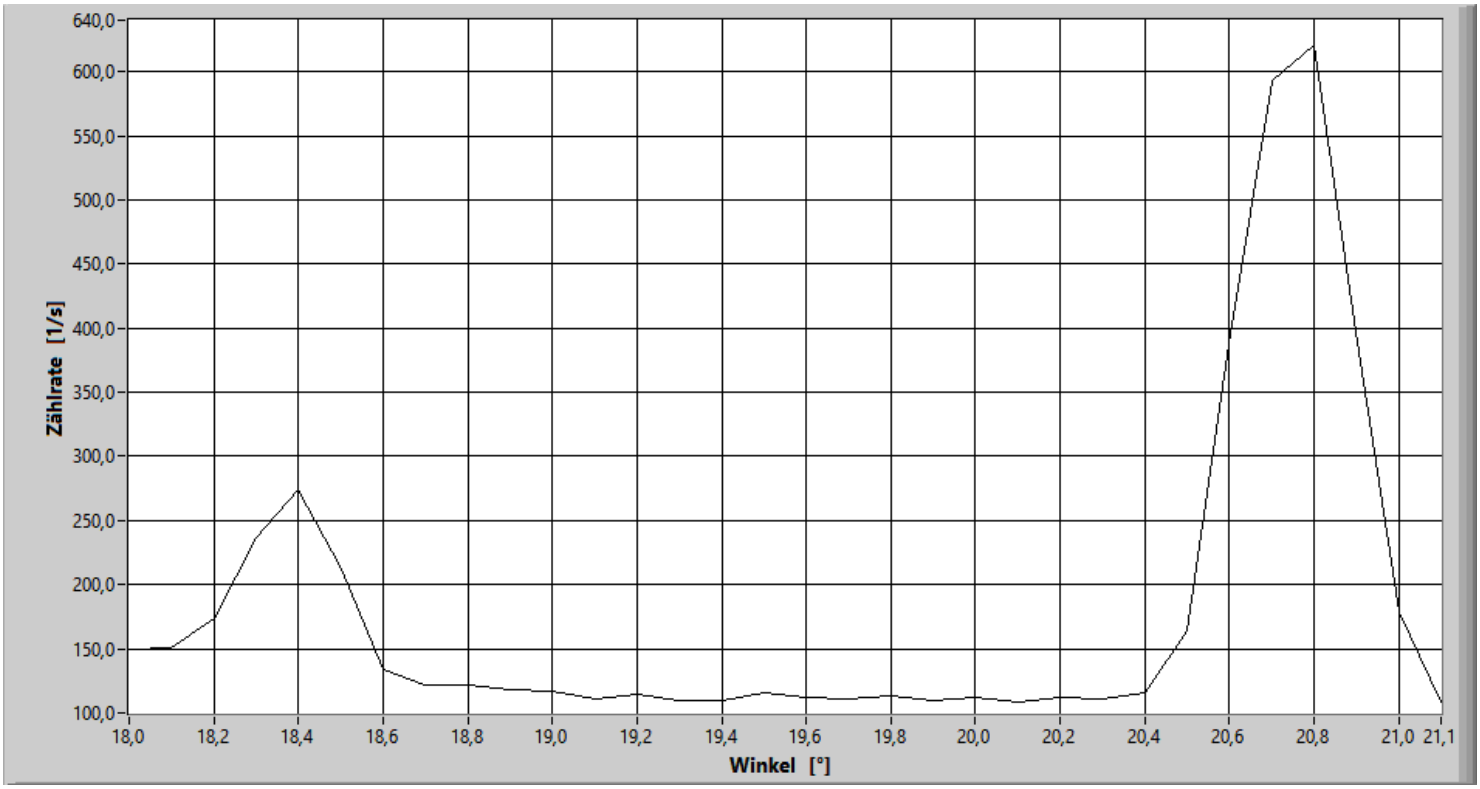


Winkel [°]	Zählrate [1/s]	Winkel [°]	Zählrate [1/s]
8,7	577,0	10,7	449,0
8,8	611,5	10,8	449,9
8,9	759,4	0,0	0,0
9,0	1155,7	0,0	0,0
9,1	1555,3	0,0	0,0
9,2	1185,3	0,0	0,0
9,3	668,6	0,0	0,0
9,4	577,9	0,0	0,0
9,5	561,7	0,0	0,0
9,6	547,0	0,0	0,0
9,7	542,4	0,0	0,0
9,8	535,1	0,0	0,0
9,9	544,6	0,0	0,0
10,0	656,6	0,0	0,0
10,1	1432,2	0,0	0,0
10,2	3277,6	0,0	0,0
10,3	3233,7	0,0	0,0
10,4	1486,8	0,0	0,0
10,5	574,1	0,0	0,0
10,6	484,2	0,0	0,0

Messprotokoll LiF zweite Ordnung

Di, 19. Nov 2024
15:04 Uhr

Röhrenspannung: 35,0 kV / Röhrenstrom: 1,0 mA / Scanbereich: 18,0° bis 21,1° / Schrittweite: 0,1° / Messzeit: 20,0 s

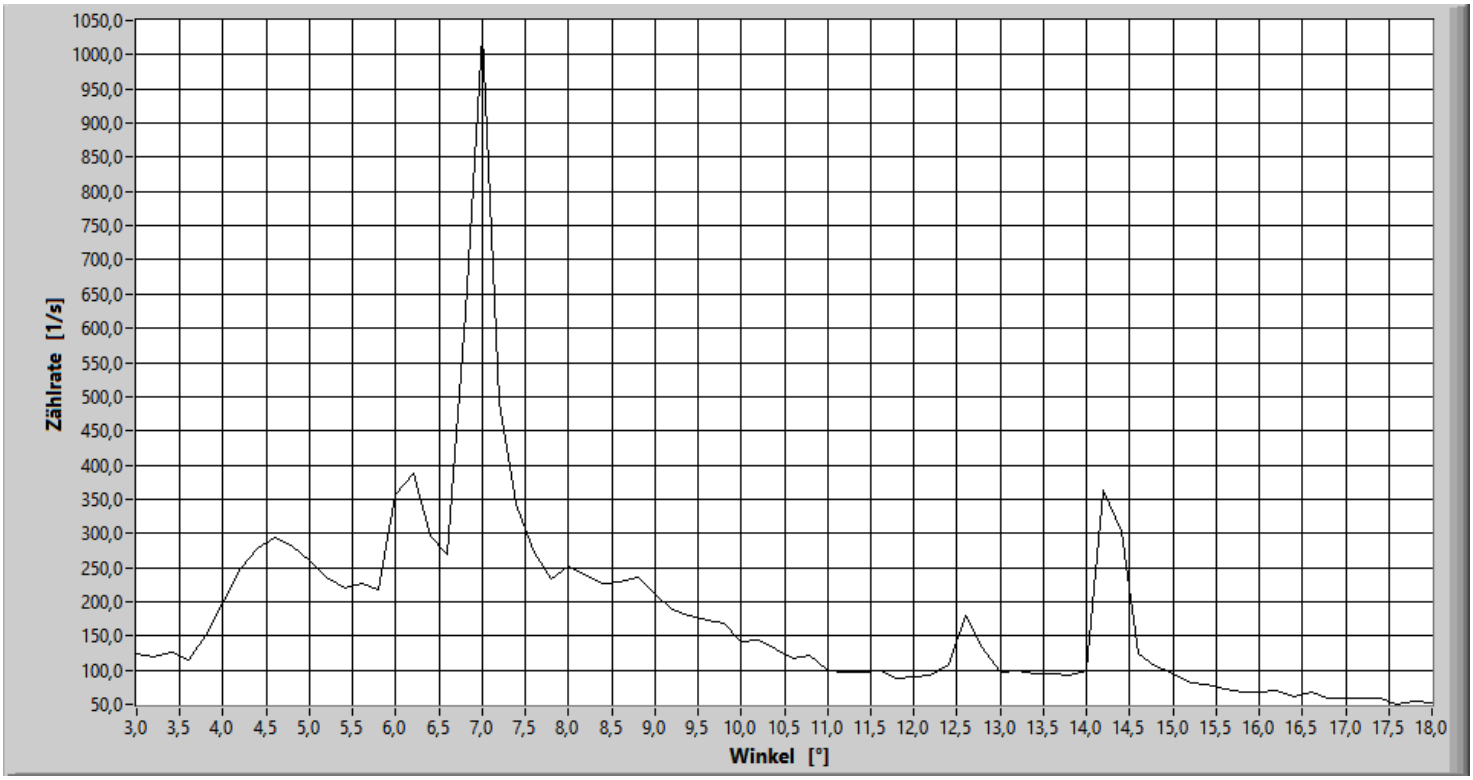


Winkel [°]	Zählrate [1/s]	Winkel [°]	Zählrate [1/s]
18,0	149,8	20,0	111,7
18,1	150,8	20,1	108,5
18,2	173,8	20,2	112,5
18,3	235,9	20,3	110,8
18,4	273,4	20,4	115,3
18,5	212,8	20,5	164,1
18,6	133,4	20,6	388,1
18,7	121,8	20,7	593,0
18,8	121,2	20,8	621,2
18,9	118,5	20,9	396,8
19,0	116,6	21,0	178,3
19,1	110,3	21,1	108,4
19,2	114,4	0,0	0,0
19,3	110,2	0,0	0,0
19,4	109,7	0,0	0,0
19,5	115,8	0,0	0,0
19,6	112,7	0,0	0,0
19,7	111,0	0,0	0,0
19,8	113,2	0,0	0,0
19,9	109,8	0,0	0,0

Messprotokoll NaCl

Di, 19. Nov 2024
15:32 Uhr

Röhrenspannung: 35,0 kV / Röhrenstrom: 1,0 mA / Scanbereich: 3,0° bis 18,0° / Schrittweite: 0,2° / Messzeit: 5,0 s



Winkel [°]	Zählrate [1/s]	Winkel [°]	Zählrate [1/s]	Winkel [°]	Zählrate [1/s]	Winkel [°]	Zählrate [1/s]
3,0	124,4	7,0	1032,2	11,0	98,2	15,0	94,4
3,2	119,6	7,2	492,4	11,2	97,2	15,2	81,8
3,4	125,2	7,4	343,4	11,4	96,6	15,4	78,2
3,6	115,8	7,6	271,2	11,6	98,6	15,6	72,4
3,8	149,6	7,8	233,8	11,8	87,2	15,8	68,6
4,0	197,0	8,0	250,6	12,0	90,0	16,0	68,0
4,2	249,4	8,2	238,4	12,2	93,2	16,2	70,2
4,4	278,0	8,4	227,4	12,4	108,2	16,4	60,8
4,6	294,4	8,6	229,8	12,6	179,6	16,6	67,6
4,8	281,2	8,8	235,8	12,8	133,2	16,8	58,2
5,0	260,2	9,0	210,4	13,0	98,0	17,0	59,0
5,2	234,6	9,2	188,0	13,2	98,6	17,2	58,0
5,4	221,0	9,4	180,8	13,4	94,0	17,4	58,2
5,6	226,0	9,6	173,0	13,6	94,8	17,6	50,4
5,8	218,4	9,8	168,2	13,8	93,6	17,8	54,4
6,0	357,4	10,0	141,8	14,0	98,4	18,0	52,2
6,2	388,6	10,2	144,0	14,2	362,8	0,0	0,0
6,4	295,8	10,4	129,6	14,4	303,6	0,0	0,0
6,6	268,8	10,6	116,8	14,6	124,8	0,0	0,0
6,8	622,4	10,8	122,0	14,8	105,4	0,0	0,0

3 Auswertung

3.1 Aufgabe 1

In Aufgabe 1 wollen wir die Grenzwellenlänge λ_{gr} herausfinden, bei der das Bremsspektrum einsetzt. Dafür plotten wir die Messwerte und legen eine Gerade durch den nahezu linearen Anstieg am kurzwelligen Ende des Spektrums. Der Plot sieht so aus:

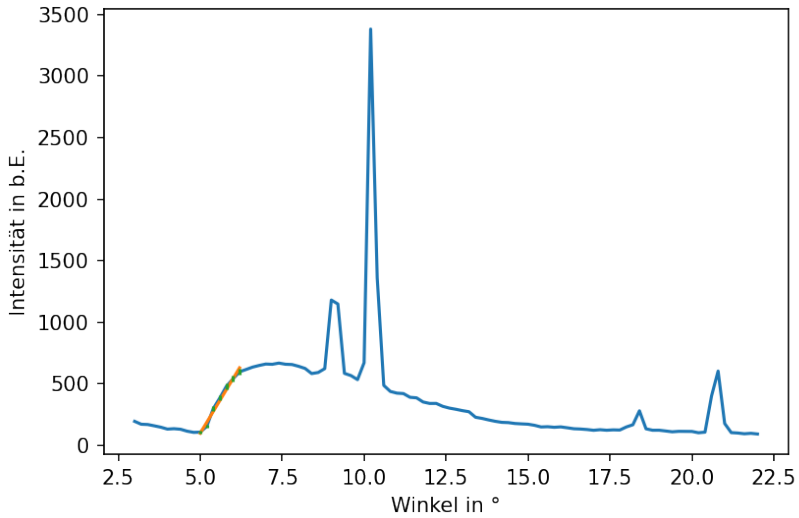


Abbildung 2: Messungen mit Gerade (orange) und Fehler (grün) beim Anstieg

Wir sehen also, dass das Bremsspektrum ungefähr bei

$$\boxed{\vartheta_1 = (5.00 \pm 0.20)^\circ}$$

einsetzt. Stellen wir nun Formel(9) nach λ um, können wir so λ_{gr} bestimmen. Der Fehler berechnet sich durch:

$$\Delta\lambda = \frac{2d}{n}\cos(\vartheta)\Delta\vartheta \approx \frac{2d}{n}\Delta\vartheta \tag{10}$$

Für die letzte Formel wurde die Kleinwinkelnäherung verwendet, die hier bei einem Winkel von 5° durchaus angebracht ist. Für d nutzen wir den im Praktikumsskript angegebenen Wert für LiF von $d = 201.4\text{pm}$, welcher als fehlerlos angegeben ist. Wir erhalten:

$$\boxed{\lambda_{gr} = (35.1 \pm 1.4)\text{pm}}$$

Da wir die Beschleunigungsspannung von $U_B = (35.00 \pm 0.10)\text{kV}$ kennen, können wir mit Formel (4) nun die Planck-Konstante berechnen. Der Fehler wird sich mit

$$\Delta h = h\sqrt{\left(\frac{\Delta U_B}{U_B}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\lambda_{gr}}{\lambda_{gr}}\right)^2} \tag{11}$$

Für die Werte c und e nutzen wir die in der 'scipy.constants'-API eingespeicherten Werte (einfacher zum rechnen) und nehmen an, dass diese fehlerlos sind bzw. die Fehler vernachlässigbar klein sind. Wir erhalten:

$$\boxed{h = (6.57 \pm 0.26) \cdot 10^{-34}\text{Js}}$$

Nun wollen wir noch den Beginn des Spektrums zweiter Ordnung bestimmen. Dafür stellen wir Formel(9) nach ϑ um, nutzen erneut die Kleinwinkelnäherung aber setzen diesmal $n = 2$. Der Fehler ist dann:

$$\Delta\vartheta = \frac{n}{2d}\Delta\lambda_{gr} \tag{12}$$

So erhalten wir:

$$\boxed{\vartheta_2 = (10.0 \pm 0.4)^\circ}$$

3.2 Aufgabe 2

In Aufgabe 2 wollen wir nun die Wellenlängen der K_α- und K_β-Linien bestimmen. Dafür nutzen wir unsere feineren Messungen des Spektrums bei den Linien. Wir wählen den Winkel, bei dem die gemessene Intensität am höchsten war und als Fehler nutzen wir $\Delta\vartheta = 0.1^\circ$, da wir die Intensität nicht feiner aufnehmen konnten, und so um diesen Bereich des Messwertes quasi 'blind' sind und nicht sehen, wie sich die Intensität dort verhält. Wir nehmen also als Winkel:

$$\boxed{\vartheta_{\alpha,1,\text{LiF}} = (10.20 \pm 0.10)^\circ}$$
$$\boxed{\vartheta_{\alpha,2,\text{LiF}} = (20.80 \pm 0.10)^\circ}$$
$$\boxed{\vartheta_{\beta,1,\text{LiF}} = (9.10 \pm 0.10)^\circ}$$
$$\boxed{\vartheta_{\beta,2,\text{LiF}} = (18.40 \pm 0.10)^\circ}$$

Nun können wir daraus wie schon in Aufgabe 1 mit Formel(9) und Formel(10) Die zugehörigen Wellenlängen bestimmen. Diese lauten:

$$\boxed{\lambda_{\alpha,1,\text{LiF}} = (71.7 \pm 0.7)\text{pm}}$$
$$\boxed{\lambda_{\alpha,2,\text{LiF}} = (73.1 \pm 0.4)\text{pm}}$$
$$\boxed{\lambda_{\beta,1,\text{LiF}} = (64.0 \pm 0.7)\text{pm}}$$
$$\boxed{\lambda_{\beta,2,\text{LiF}} = (64.7 \pm 0.4)\text{pm}}$$

Nun wollen wir noch die Halbwertsbreite der K_α-Linie bestimmen. Dafür halbieren wir zuerst den Maximalwert des Peaks und erhalten $I \approx 1640$b.E. Plotten wir nun diese horizontale Linie, sehen wir, dass sich diese mit den vertikalen Linien bei $\vartheta_a = 10.11$ und $\vartheta_b = 10.39$ sehr gut auf der Verbindungslinie schneiden.

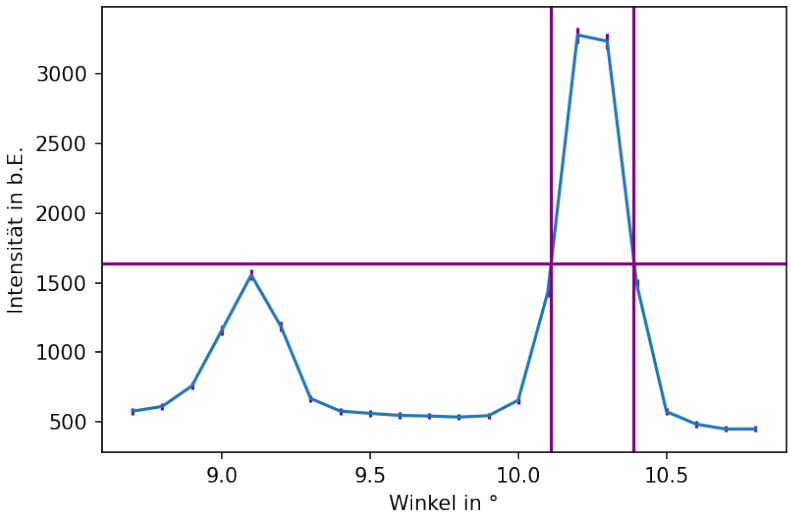


Abbildung 3: Grafik zur Abschätzung der Halbwertsbreite

So erhalten wir also:

$\boxed{FWHM \approx 0.28°}$

3.3 Aufgabe 3

Nun wollen wir unsere Messwerte aus Tabelle 2 des Messprotokolls graphisch auftragen:

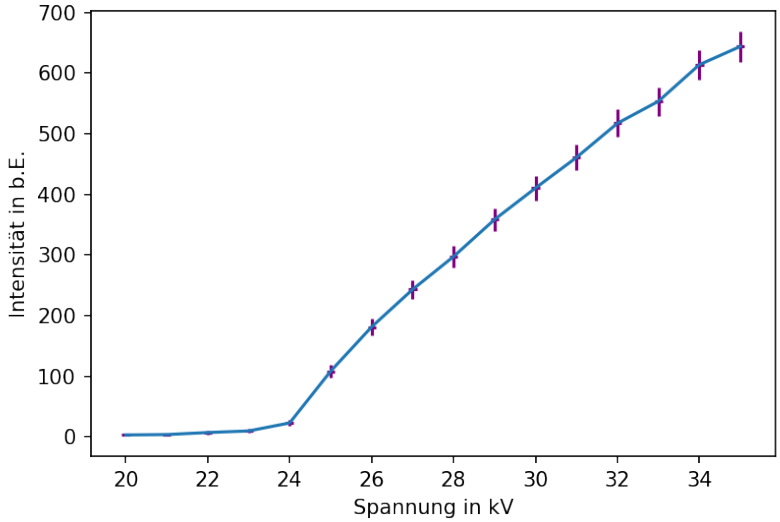


Abbildung 4: Messwerte der Tabelle 2

Mit Hilfe eines linearen Fits der späteren, steigenden Messwerte können wir die Ein-

satzspannung U_E herausfinden, bei der die Intensität gleich 0 werden würde. Berechnen kann man dies aus dem Fit mit:

$$U_E = -\frac{b}{a} \tag{13}$$

$$\Delta U_E = U_E \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2} \tag{14}$$

wobei a die Steigung der Geraden ist und b der y-Achsenabschnitt. Wir fitten also und erhalten folgende Ergebnisse:

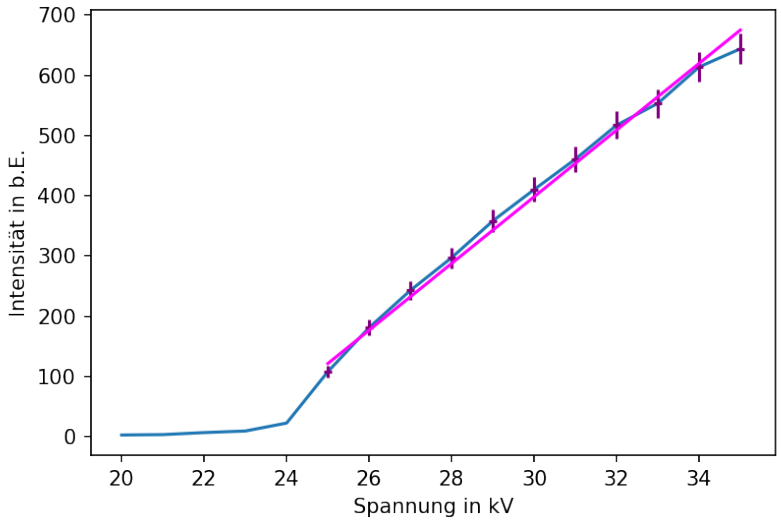


Abbildung 5: Linearer Fit der Spannung

$$\boxed{a = (55.4 \pm 1.3)\frac{\text{b.E.}}{\text{kV}}}$$

$$\boxed{b = (-1260 \pm 40)\text{b.E.}}$$

$$\boxed{U_E = (22.8 \pm 0.9)\text{kV}}$$

Die Grenzwellenlänge ist nach Formel(9) und Formel(10):

$$\boxed{\lambda_{gr} = (52.73 \pm 0.10)\text{pm}}$$

(Der Winkel von 7.5° wurde als nahezu fehlerlos angesehen, weswegen der Fehler von 0.10pm geschätzt wurde aufgrund von sonstigen Störeffekten.) Nutzen wir nun Formel (4) und Formel (11) um h zu berechnen, erhalten wir:

$$\boxed{h = (6.43 \pm 0.25) \cdot 10^{-34}\text{Js}}$$

3.4 Aufgabe 4

Wir haben nun den LiF-Kristall mit einem NaCl-Kristall ausgetauscht und wollen anhand des Spektrums den Netzebenenabstand d und die Avogadrokonstante N_A bestimmen. Zuerst lesen wir wie in Aufgabe 2 die Winkel ab, bei denen das charakteristische Spektrum auftritt. Da wir allerdings grober als in Aufgabe 2 gemessen haben, nehmen wir hier den Fehler von $\Delta\vartheta = 0.2°$
Die abgelesenen Werte lauten:

$$\boxed{\vartheta_{\alpha,1,\mathrm{NaCl}} = (7.20 \pm 0.20)°}$$
$$\boxed{\vartheta_{\alpha,2,\mathrm{NaCl}} = (14.20 \pm 0.20)°}$$
$$\boxed{\vartheta_{\beta,1,\mathrm{NaCl}} = (6.40 \pm 0.20)°}$$
$$\boxed{\vartheta_{\beta,2,\mathrm{NaCl}} = (12.60 \pm 0.20)°}$$

Da die Lage der K-Linien von der Anode abhängen, und wir diese nicht getauscht haben, können wir die λ aus Aufgabe 2 wiederverwenden. Setzen wir diese in Formel(9) ein, können wir jetzt zu d zurückrechnen. Der Fehler ist dann mit der Kleinwinkelnäherung:

$$\Delta d = d\sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta}\right)^2} \tag{15}$$

Wir erhalten so:

$$\boxed{d_{\alpha,1,\mathrm{NaCl}} = (285 \pm 8)\mathrm{pm}}$$
$$\boxed{d_{\alpha,2,\mathrm{NaCl}} = (295 \pm 4)\mathrm{pm}}$$
$$\boxed{d_{\beta,1,\mathrm{NaCl}} = (286 \pm 9)\mathrm{pm}}$$
$$\boxed{d_{\beta,2,\mathrm{NaCl}} = (294 \pm 5)\mathrm{pm}}$$

Nutzen wir den gewichteten Mittelwert, so erhalten wir für den Ebenenabstand von NaCl:

$$\boxed{d = (292.6 \pm 2.8)\mathrm{pm}}$$

Diesen können wir nutzen um die Avogadrokonstante nach Formel (6) zu berechnen. Den Fehler berechnet man mit:

$$\Delta N_A = \frac{3M_{mol}}{2\rho d^4}\Delta d \tag{16}$$

Aus unseren Messungen erhält man also eine Avogadrokonstante von:

$$\boxed{N_A = (5.39 \pm 0.15) \cdot 10^{23}\frac{1}{\mathrm{mol}}}$$

wenn man die Werte für die Dichte und molare Masse des Natriumchlorid aus dem Skript ohne Fehler nimmt.

4 Zusammenfassung und Diskussion

Zusammengefasst haben wir zuerst einen LiF-Kristall verwendet, um das Spektrum der Molybdän-Anode zu untersuchen. Wir haben die Winkel erster und zweiter Ordnung der Grenzwellenlänge als $\boxed{\vartheta_1 = (5.00 \pm 0.20)^\circ}$ und $\boxed{\vartheta_2 = (10.0 \pm 0.4)^\circ}$ bestimmt. Die Grenzwellenlänge selbst haben wir als $\boxed{\lambda_{gr} = (35.1 \pm 1.4)\text{pm}}$ herausbekommen. Mit der Grenzwellenlänge konnten wir schließlich die Planck-Konstante bestimmen als:

$$\boxed{h_1 = (6.57 \pm 0.26) \cdot 10^{-34}\text{Js}}$$

Daraufhin haben wir die Winkel der charakteristischen Spektrallinien ausgelesen und haben damit die Wellenlängen der K_α- undK_β-Linien bestimmt. Sie lauteten:

$$\boxed{\lambda_{\alpha,1} = (71.7 \pm 0.7)\text{pm}}$$
$$\boxed{\lambda_{\alpha,2} = (73.1 \pm 0.4)\text{pm}}$$
$$\boxed{\lambda_{\beta,1} = (64.0 \pm 0.7)\text{pm}}$$
$$\boxed{\lambda_{\beta,2} = (64.7 \pm 0.4)\text{pm}}$$

Die Halbwertsbreite der K_α-Linie haben wir auch bestimmt:

$$\boxed{FWHM \approx 0.28^\circ}$$

Mithilfe der Steigung eines $I(U)$-Diagramms bei konstantem Winkel konnten wir über einen weiteren Weg die Planck-Konstante bestimmen. Diesmal kamen wir auf:

$$\boxed{h_2 = (6.43 \pm 0.25) \cdot 10^{-34}\text{Js}}$$

Wir haben den LiF-Kristall nun mit einem NaCl-Kristall ausgetauscht und haben nun erneut die Winkel der K_α- undK_β-Linien ausgemessen. Mit dem Wissen über die Wellenlängen der charakteristischen Linien konnten wir nun auf die Gitterkonstante d des Kristalls, sowie die Avogadrokonstante N_A bestimmen:

$$\boxed{d = (292.6 \pm 2.8)\text{pm}}$$
$$\boxed{N_A = (5.39 \pm 0.15) \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}}$$

Vergleichen wir nun zuerst die Ergebnisse für die Planck-Konstante mit dem Literaturwert, welcher im Skript angegeben ist. Berechnen wir die Abweichungen für beide erhaltenen Werte, bekommen wir:

$$\boxed{\sigma_{h_1} = 0.19}$$
$$\boxed{\sigma_{h_2} = 0.8}$$

Besonders die erste Berechnung lag also erstaunlich nah an dem Literaturwert, jedoch

weichen beide nicht signifikant ab. Man kann also davon ausgehen, dass jegliche Fehler von statistischer Natur sind und nicht auf systematische Fehler zurückzuführen sind.
Vergleichen wir nun die Wellenlängen, welche wir für die K_α und K_β-Linien berechnet haben ebenfalls mit den Literaturwerten im Skript. Wir erhalten Abweichungen von:

$\boxed{\sigma_{\alpha,1} = 0.9}$
$\boxed{\sigma_{\alpha,2} = 5}$
$\boxed{\sigma_{\beta,1} = 1.3}$
$\boxed{\sigma_{\beta,2} = 4}$

Besonders auffällig hier ist, dass die Wellenlänge, welche wir am Spektrum erster Ordnung ausgemessen haben, beide male nicht Signifikant vom Literaturwert abweichen. Hier kann man also davon ausgehen, dass die Fehler statistischer Natur sind. Die Wellenlängen, die vom Spektrum zweiter Ordnung ausgerechnet wurden, weichen jedoch signifikant von den erwarteten Werten ab. Hier wird also ein systematischer Fehler vorliegen. Denkbar wäre beispielsweise, dass das Kristallplättchen nicht vollständig gut befestigt in dem Goniometeraufbau lag. So könnte es gerutscht sein und den Winkel etwas verändert haben. Auch ist beim Auswerten aufgefallen, dass trotz feinerer Messung im Spektrum zweiter Ordnung die α-Linie scheinbar nicht vollständig aufgenommen wurde. Die beiden benachbarten Messungen sind ähnlich hoch und so wird das eigentliche Maximum in der Mitte der beiden liegen, wir haben allerdings einfach den Höheren der Beiden genommen und versucht es mit dem Fehler zu kompensieren. Das könnte ebenfalls zu dem falschen Wert geführt haben.
Vergleichen wir nun noch zuletzt die Avogadro-Konstante mit dem gegebenen Literaturwert, so sehen wir, dass dieser um

$\boxed{\sigma_{N_A} = 4.21}$

abweicht. Auch diese Abweichung ist signifikant. Meine beste Vermutung wäre, dass entweder auch hier beim Messen der Winkel etwas schief gelaufen ist (Platte lag nicht richtig etc.), oder dass sich der Fehler aus Aufgabe 2 hierher weitergezogen hat. Beim berechnen der Ebenenabstände d wurden auch die 'falschen' Werte für die Wellenlängen mit in Betracht gezogen. Da diese allerdings ja stark von dem echten Wert abgewichen sind, ist es denkbar, dass dadurch auch der Fehler der Avogadrokonstante zumindest teilweise zustande gekommen ist.
Trotzdem würde ich sagen, dass der Versuch relativ erfolgreich war. Trotz allem haben wir zumindest die Planck-Konstante h sehr gut bestimmen können, und wenn man nur die Ergebnisse erster Ordnung betrachtet, haben wir auch die charakteristischen Wellenlängen der Molybdän-Anode gut bestimmen können.
Bei erneutem durchführen würde ich vor allem darauf achten, dass unser Kristall richtig in der Vorrichtung platziert ist und wenn möglich würde es sich auch anbieten, die Peaks gegebenenfalls noch präziser auszumessen als bereits eh schon.

5 Anhang

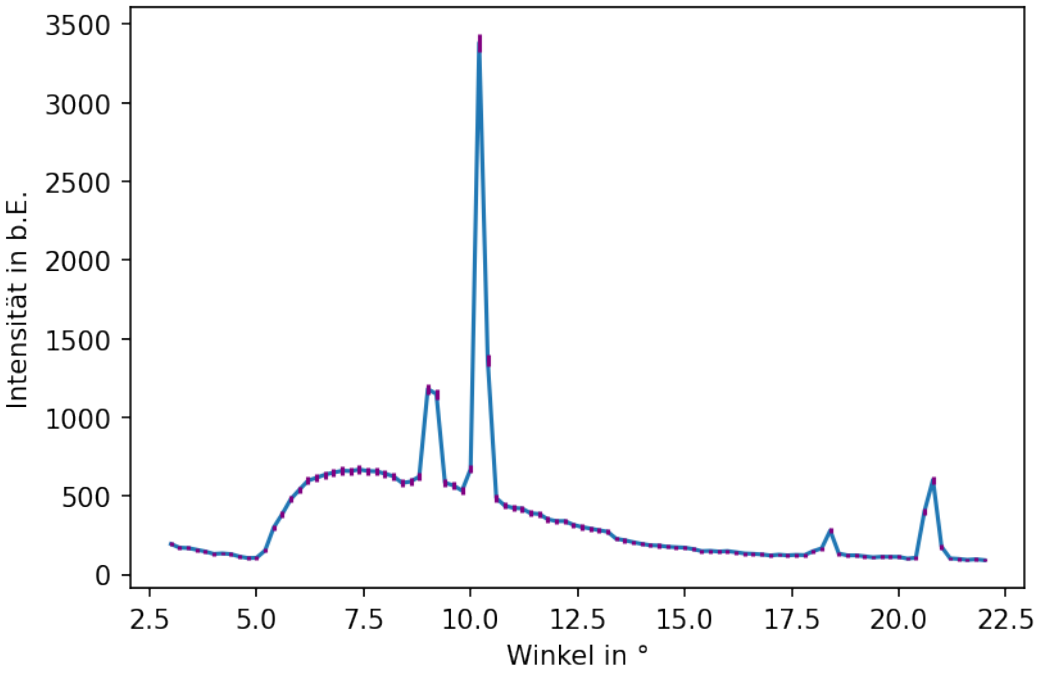
Versuch_255_Roentgenspektrometer

January 15, 2025

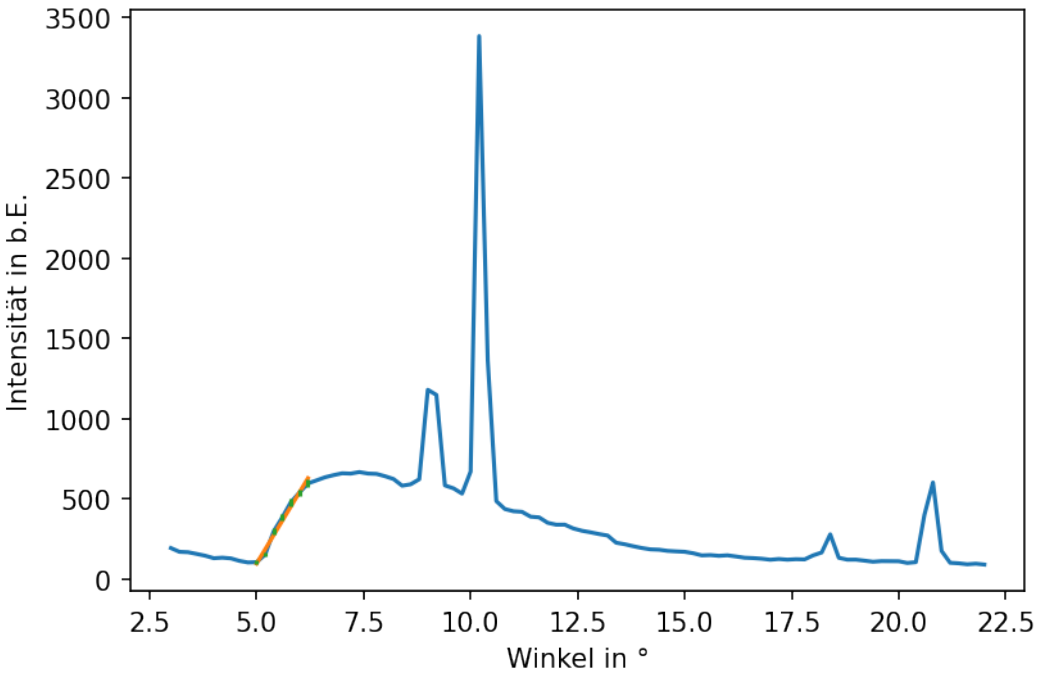
[105]:
```
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.core.function_base import linspace
from scipy.optimize import curve_fit
import scipy.constants as c
```

[106]:
```
angle = np.loadtxt('./Messwerte/255LiF.txt', usecols=[0]) #Messdaten zu Winkel
intens = np.loadtxt('./Messwerte/255LiF.txt', usecols=[1]) #Messdaten zu␣
 ↪Intensität
intensDelta = np.sqrt(intens) #statistischer Fehler
plt.figure(dpi = 150)
plt.plot(angle, intens)
plt.errorbar(angle, intens, intensDelta, linestyle = 'none', color = 'purple')␣
 ↪#Fehlerbalken einzeichnen
plt.xlabel('Winkel in °')
plt.ylabel('Intensität in b.E.')
```

[106]:
```
Text(0, 0.5, 'Intensität in b.E.')
```



[107]:
```
def lin(x,a,b): #Definition lineare Funktion
    return a*x+b
popt, pcov = curve_fit(lin, angle[10:17], intens[10:17], sigma = intensDelta[10:
↪17]) #Fitparameter
plt.figure(dpi = 150)
plt.plot(angle, intens)
plt.plot(angle[10:17], lin(angle[10:17], *popt)) #Fitgerade einzeichnen
plt.errorbar(angle[10:17], intens[10:17], intensDelta[10:17], linestyle␣
↪='none') #Fehlerbalken einzeichnen
plt.xlabel('Winkel in °')
plt.ylabel('Intensität in b.E.')
plt.savefig("Plot1Spektro.png")
```



[108]:
```
def calcLambda(angle,angleDelta,n,d):
    critlambda = 2*d*angle / n
    critlambdaDelta = 2*d*angleDelta / n
    return(critlambda,critlambdaDelta)
```

[109]:
```
critangle = np.radians(5)
critangleDelta = np.radians(0.2)
d = 201.4e-12
print(calcLambda(critangle,critangleDelta,1,d))
```

```
(3.5150931135165794e-11, 1.4060372454066319e-12)
```

[110]:
```
U_B = 35e3
U_BDelta = 100
h = critlambda * c.e * U_B / c.c
hDelta = h * np.sqrt((U_BDelta/U_B)**2 + (critlambdaDelta/critlambda)**2)
print(h,hDelta)
```

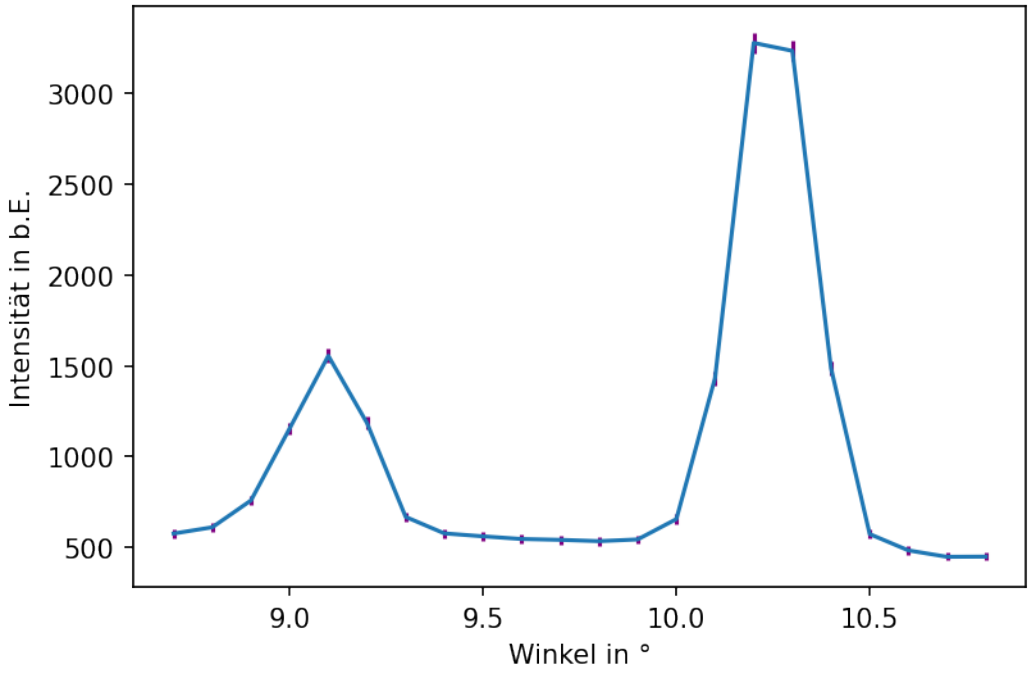
```
6.574982011334323e-34 2.636693434003863e-35
```

[111]:
```
n=2
theta = np.degrees(n*critlambda/(2*d))
thetaDelta = np.degrees(n * critlambdaDelta/(2*d))
print(theta,thetaDelta)
```

```
10.0 0.4
```

[112]:
```
angle1 = np.loadtxt('./Messwerte/255ersteOrd.txt', usecols=[0]) #Messdaten␣
↪Winkel (1. Ordnung)
intens1 = np.loadtxt('./Messwerte/255ersteOrd.txt', usecols=[1]) #Messdaten␣
↪Zählrate (1. Ordnung)
intens1Delta = np.sqrt(intens1)
plt.figure(dpi = 150)
plt.errorbar(angle1, intens1, intens1Delta, linestyle = 'none', color =␣
↪'purple') #Fehlerbalken einzeichnen
plt.plot(angle1, intens1)
plt.xlabel('Winkel in °')
plt.ylabel('Intensität in b.E.')
```

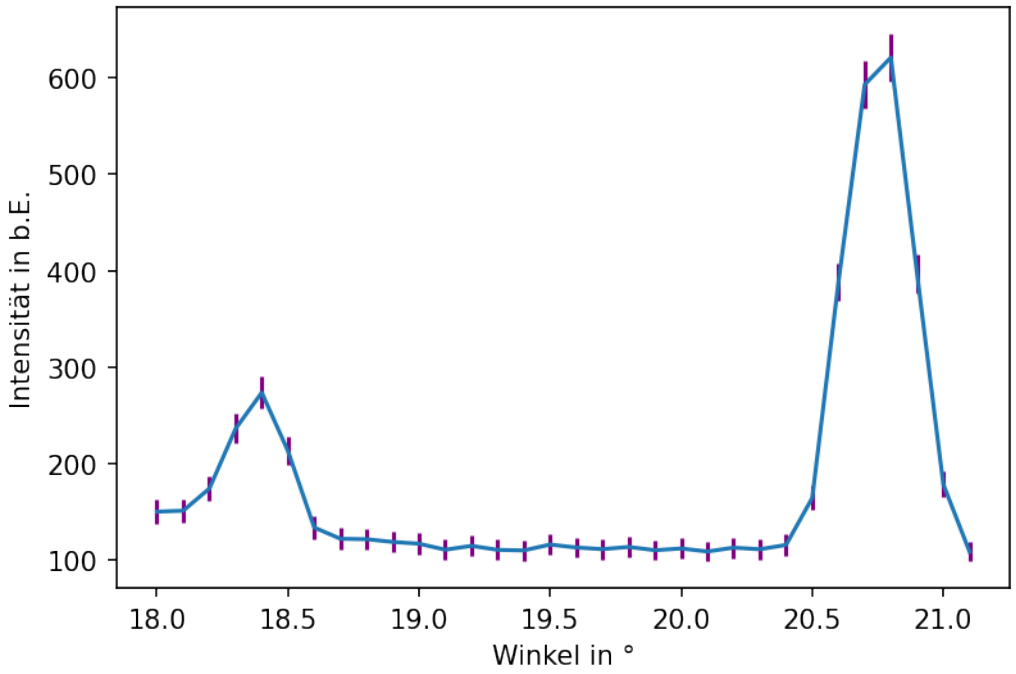
[112]:
```
Text(0, 0.5, 'Intensität in b.E.')
```



[113]:
```
angle2 = np.loadtxt('./Messwerte/255zweiteOrd.txt', usecols=[0]) #Messdaten␣
↪Winkel (2. Ordnung)
intens2 = np.loadtxt('./Messwerte/255zweiteOrd.txt', usecols=[1]) #Messdaten␣
↪Zählrate (2. Ordnung)
intens2Delta = np.sqrt(intens2)
plt.figure(dpi = 150)
plt.errorbar(angle2, intens2, intens2Delta, linestyle = 'none', color =␣
↪'purple') #Fehlerbalken
```

```
plt.plot(angle2, intens2)
plt.xlabel('Winkel in °')
plt.ylabel('Intensität in b.E.')
```

[113]: Text(0, 0.5, 'Intensität in b.E.')



[114]:
```
alpha_1 = np.radians(10.2)
alpha_2 = np.radians(20.8)
beta_1 = np.radians(9.1)
beta_2 = np.radians(18.4)
angleDelta = np.radians(0.1)
print(calcLambda(alpha_1,angleDelta,1,d))
print(calcLambda(alpha_2,angleDelta,2,d))
print(calcLambda(beta_1,angleDelta,1,d))
print(calcLambda(beta_2,angleDelta,2,d))
```

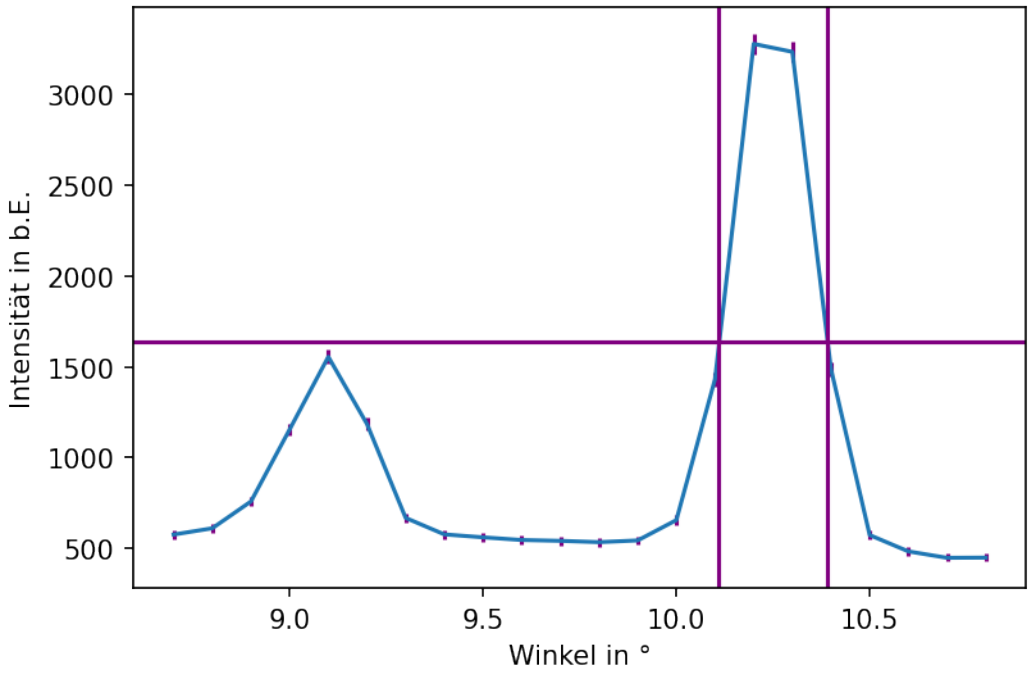
```
(7.170789951573822e-11, 7.030186227033159e-13)
(7.311393676114486e-11, 3.5150931135165797e-13)
(6.397469466600175e-11, 7.030186227033159e-13)
(6.467771328870507e-11, 3.5150931135165797e-13)
```

[115]:
```
halfMax = intens1[15]/2
plt.figure(dpi = 150)
plt.errorbar(angle1, intens1, intens1Delta, linestyle = 'none', color =␣
↪'purple') #Fehlerbalken einzeichnen
```

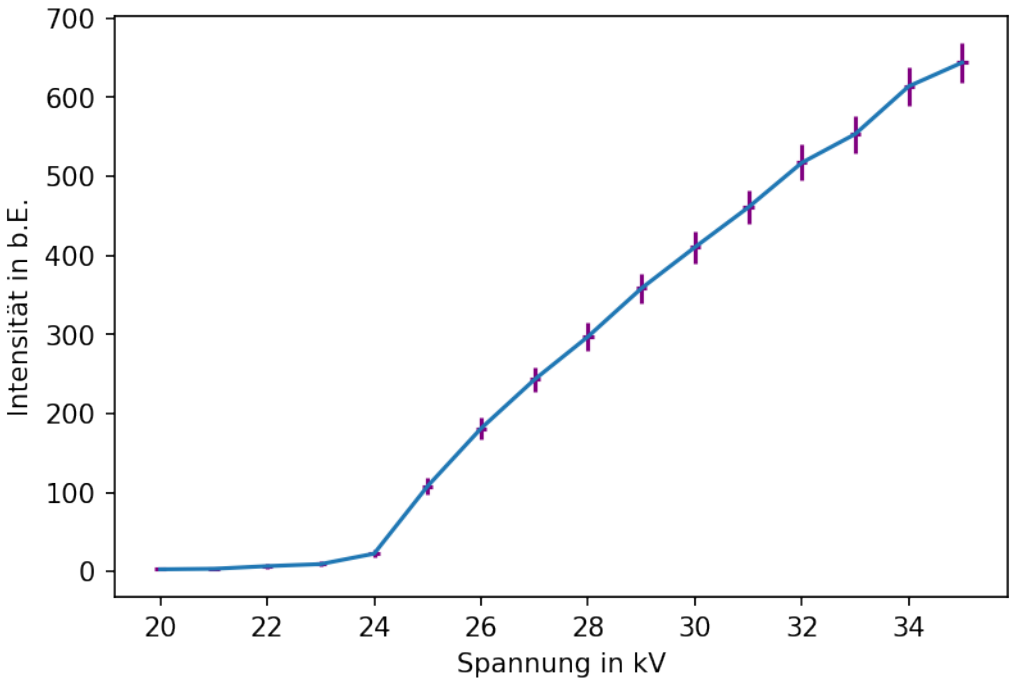
```
plt.plot(angle1, intens1)
plt.xlabel('Winkel in °')
plt.ylabel('Intensität in b.E.')
plt.axhline(y=halfMax, color = 'purple')
plt.axvline(x=10.11, color = 'purple')
plt.axvline(x=10.39, color = 'purple')
plt.savefig("Plot2Spektro")

print(halfMax)
```

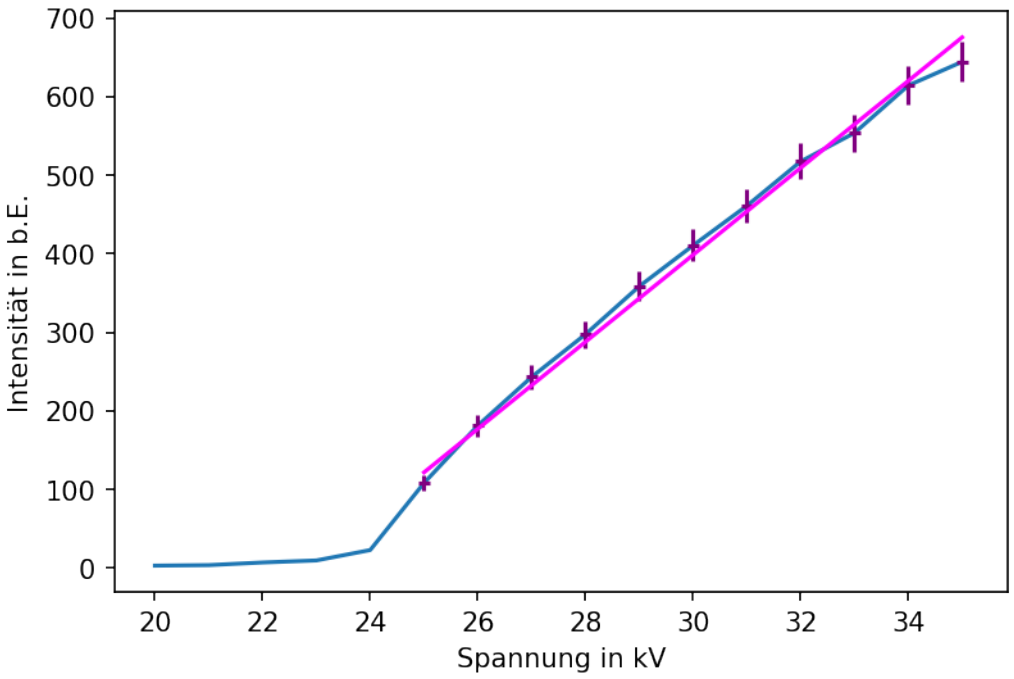
```
1638.775
```



[116]:
```
voltage = np.arange(20, 36)*1000
voltageDelta = np.full_like(voltage, 100)
countRate= [2.95,3.6,6.95,9.55,22.75,108.1,181.2,243,297.3,358.4,410.4,460.
↪9,517.3,553.6,614,644.1]
countRateDelta = np.sqrt(countRate)
plt.figure(dpi = 150)
plt.errorbar(voltage/1000, countRate, yerr = countRateDelta, xerr =␣
↪voltageDelta/1000, linestyle = 'none', color = 'purple') #Fehlerbalken
plt.plot(voltage/1000, countRate)
plt.xlabel('Spannung in kV')
plt.ylabel('Intensität in b.E.')
plt.savefig("Plot3Spektro.png")
```



[117]:
```
popt1, pcov1 = curve_fit(lin, voltage[5:]/1000, countRate[5:], sigma =␣
↪countRateDelta[5:])
plt.figure(dpi = 150)
plt.plot(voltage/1000, countRate)
plt.errorbar(voltage[5:]/1000, countRate[5:], yerr = countRateDelta[5:], xerr =␣
↪voltageDelta[5:]/1000, linestyle = 'none', color = 'purple')
plt.plot(voltage[5:]/1000, lin(voltage[5:]/1000, *popt1), color = 'magenta')
plt.xlabel('Spannung in kV')
plt.ylabel('Intensität in b.E.')
plt.savefig("Plot4Spektro.png")
```



[118]:
```
popt1[0], np.sqrt(pcov1[0,0]) #Steigung und Fehler der Steigung
```

[118]: (55.3641585077225, 1.3311846142748964)

[119]:
```
popt1[1], np.sqrt(pcov1[1,1]) #y-Achsenabschnitt und Fehler des␣
↪y-Achsenabschnitts
```

[119]: (-1262.4962048914756, 37.813979015595)

[120]:
```
U_E2 = -popt1[1]/popt1[0]
U_E2Delta = U_E2*np.sqrt((np.sqrt(pcov1[1,1])/popt1[1])**2 + (np.
↪sqrt(pcov1[0,0])/popt1[0])**2)
print(U_E2,U_E2Delta)
```

```
22.803493070618522 0.8758528374845489
```

[121]:
```
critlambda2 = calcLambda(np.radians(7.5),0,1,d)
print(critlambda2)
```

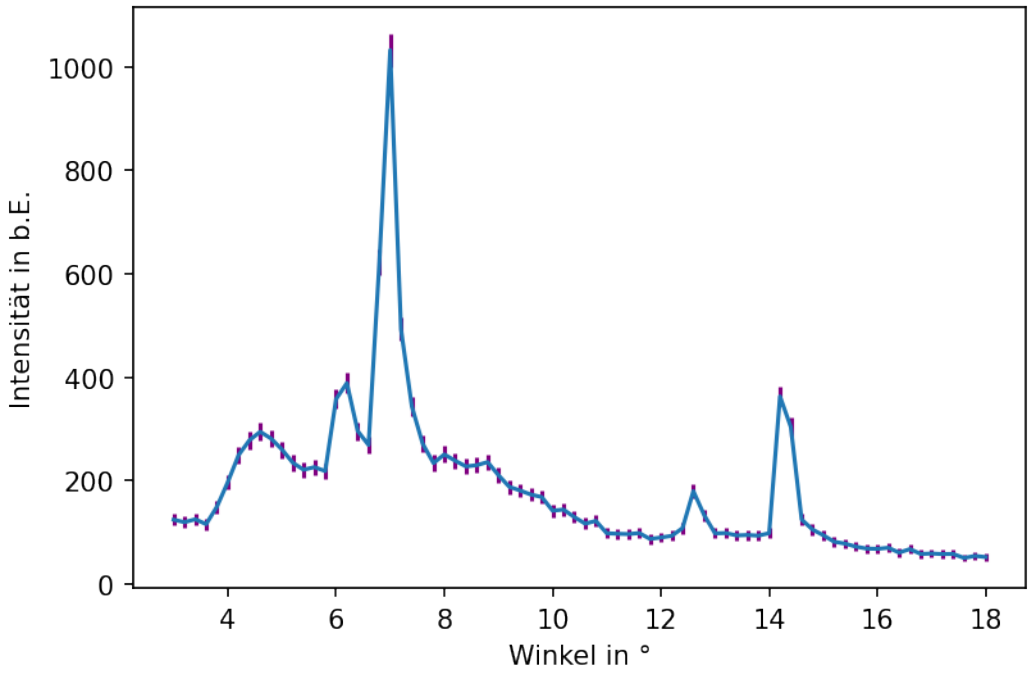
```
(5.272639670274869e-11, 0.0)
```

[129]:
```
h1 = critlambda2[0] * c.e * U_E2*1000 / c.c
hDelta1 = h * np.sqrt((U_E2Delta/U_E2)**2 + (critlambda2[1]/critlambda2[0])**2)
print(h,hDelta)
```

```
6.574982011334323e-34 2.636693434003863e-35
```

[123]:
```
angle3 = np.loadtxt('./Messwerte/255NaCl.txt', usecols=[0]) #Messdaten Winkel
intens3 = np.loadtxt('./Messwerte/255NaCl.txt', usecols=[1]) #Messdaten␣
↪Intensität
intens3Delta = np.sqrt(intens3)
plt.figure(dpi = 150)
plt.errorbar(angle3, intens3, intens3Delta, linestyle = 'none', color =␣
↪'purple') #Fehlerbalken
plt.plot(angle3, intens3)
plt.xlabel('Winkel in °')
plt.ylabel('Intensität in b.E.')
```

[123]:
```
Text(0, 0.5, 'Intensität in b.E.')
```



[124]:
```
theta = np.radians(np.array([7.2,14.2,6.4,12.6]))
deltatheta = np.radians(0.2)
order = np.array([1,2,1,2])
lambdas = np.
↪array([calcLambda(alpha_1,angleDelta,1,d)[0],calcLambda(alpha_2,angleDelta,2,d)[0],calcLamb
lambdasDelta = np.
↪array([calcLambda(alpha_1,angleDelta,1,d)[1],calcLambda(alpha_2,angleDelta,2,d)[1],calcLamb
dNaCl = order * lambdas / (2*theta)
dNaClDelta = dNaCl * np.sqrt((lambdasDelta/lambdas)**2 + (deltatheta/theta)**2)
print(dNaCl)
```

```
print(dNaClDelta)
```

```
[2.85316667e-10 2.95008451e-10 2.86365625e-10 2.94107937e-10]
[8.40460679e-12 4.39044778e-12 9.48610009e-12 4.93443963e-12]
```

[125]:
```
dbest = 292.6e-12
dbestdelta = 2.8e-12
Mmol = 58.44
rho = 2.164e6
NA = Mmol/(2*rho*(dbest**3))
NADelta = 3*Mmol*dbestdelta/(2*rho*(dbest**4))
print(NA,NADelta)
```

```
5.3901393096794544e+23 1.5474084142620445e+22
```